

N° D'ORDRE :

1277.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. ARMAND LAMBERT,

Agrégé des Sciences mathématiques,
Stagiaire à l'Observatoire de Paris.

1^{re} THÈSE. — SUR LES COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTUR-
BATRICE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 novembre 1907, devant la Commission d'examen.

MM. P. APPELL, *Président.*
POINCARÉ, *Examineurs.*
HADAMARD,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

N° D'ORDRE :

1277.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. ARMAND LAMBERT,

Agrégé des Sciences mathématiques,
Stagiaire à l'Observatoire de Paris.

1^{re} THÈSE. — SUR LES COEFFICIENTS DU DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTUR-
BATRICE.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 9 novembre 1907, devant la Commission d'examen.



MM. P. APPELL, *Président.*
POINCARÉ, *Examineurs.*
HADAMARD, *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	PAUL APPELL.....	Mécanique rationnelle.
DOYEN HONORAIRE	G. DARBOUX, professeur.	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES..	L. TROOST,	
	CH. WOLF.	
	RIBAN.	
	LIPPMANN	Physique.
	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	VÉLAIN.....	Géographie physique.
PROFESSEURS.....	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	PELLAT.....	Physique.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique Id.
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	N.....	Chimie biologique.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	N.....	Physique.
	N.....	Chimie.
	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	HADAMARD.....	Calcul différentiel et intégral.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
PROFESSEURS ADJOINTS.....	MICHEL.....	Minéralogie.
	DAGUILLON.....	Botanique.
	BOUVEAULT.....	Chimie organique.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	PRUVOT.....	Anatomie.
	CAULLERY.....	Embryologie.
SECRÉTAIRE.....	A. GUILLET.	

A

MONSIEUR M. LÆWY,

DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

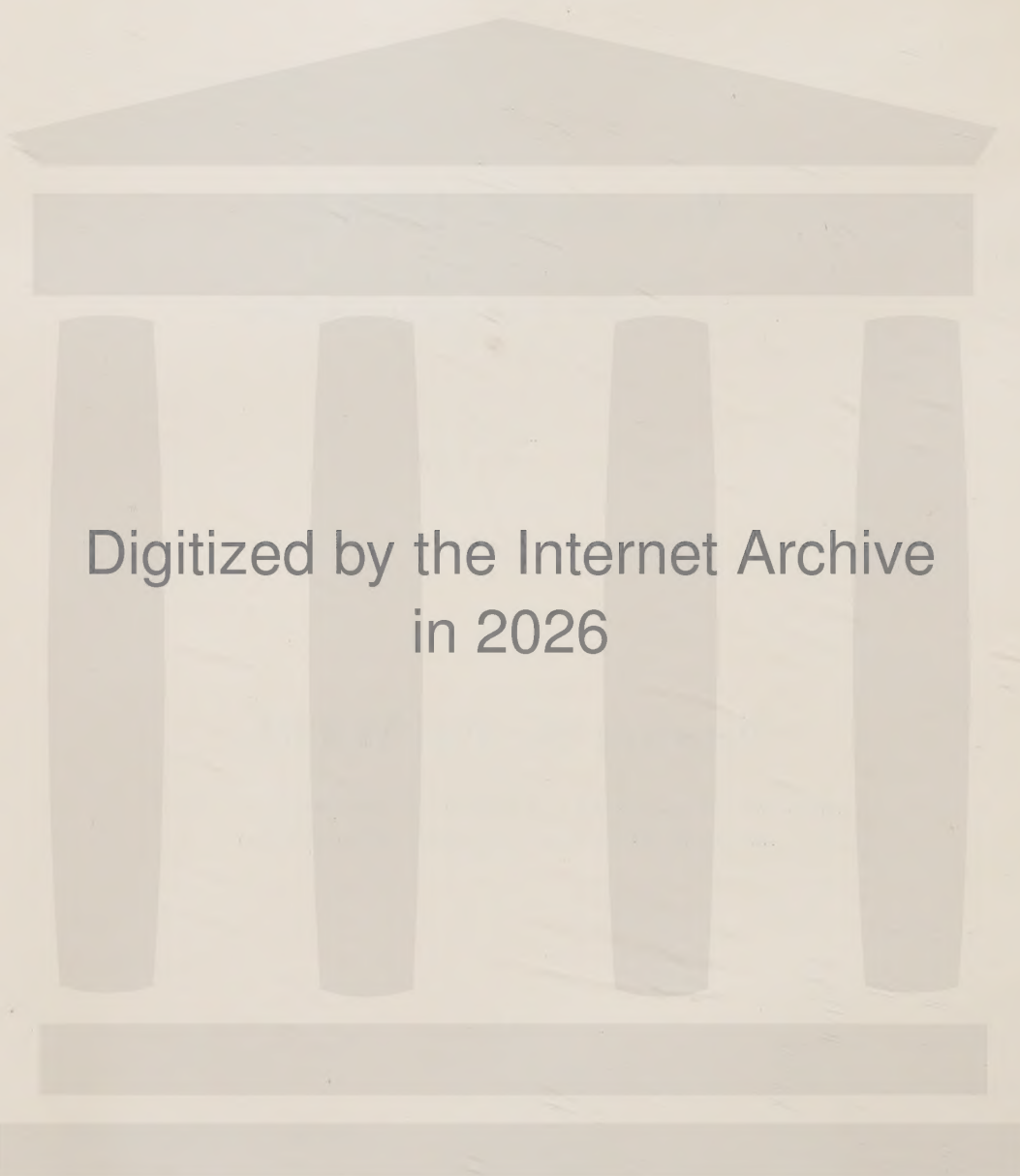
A

MONSIEUR H. POINCARÉ,

PROFESSEUR DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS,
MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES.

Hommage de respectueuse gratitude.

ARMAND LAMBERT.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547114_0023

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES COEFFICIENTS

DU

DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

INTRODUCTION.

Le développement de la fonction perturbatrice domine la théorie des planètes. Les équations de leurs mouvements s'intègrent, en effet, par des méthodes d'approximations dont le point de départ est la considération de l'orbite képlerienne elliptique que décrirait chaque planète si, fictivement, elle se trouvait seule en présence du Soleil; l'orbite, troublée par la présence des masses perturbatrices, s'écarte peu de l'orbite elliptique si les masses troublantes sont peu considérables.

Les différences entre les valeurs troublées des éléments et leurs valeurs képlériennes s'expriment au moyen d'une fonction des coordonnées des planètes fictives (la fonction perturbatrice) et de ses dérivées par rapport aux éléments du mouvement képlerien.

La fonction perturbatrice se compose de deux parties : la partie principale et la partie complémentaire, dont les développements en série, ainsi que ceux de leurs dérivées qui interviennent dans la théorie, se déduisent du développement de $\frac{1}{\Delta^{2s}}$, où Δ représente la distance des deux planètes fictives et s un entier positif impair.

Les coefficients du développement de $\frac{1}{\Delta^{2s}}$ procédant suivant les anomalies excentriques sont des fonctions des éléments elliptiques. Leurs propriétés analytiques, leurs lois d'interdépendance ont été étudiées par Laplace dans le cas où les orbites sont circulaires et leurs plans confondus, par Tisserand dans le

cas d'orbites circulaires, leur inclinaison mutuelle étant sensible, par M. Poincaré qui a déterminé, dans le cas général, le nombre des coefficients indépendants au moyen desquels les autres s'expriment linéairement.

Nous nous limitons, dans ce travail, au cas où les orbites sont circulaires, leur inclinaison mutuelle étant sensible. Les coefficients du développement de la fonction perturbatrice peuvent être considérés alors comme des fonctions du rapport des rayons des orbites et de l'inclinaison des orbites; M. Poincaré a montré que, dans ce cas, les coefficients et leurs dérivées de tous ordres, par rapport aux grandeurs qui y figurent, s'expriment linéairement au moyen de quatre coefficients.

Supposant connus les coefficients pour une valeur particulière du rapport des rayons et pour une valeur de l'inclinaison des orbites, nous chercherons quel parti on peut tirer de cette connaissance pour le cas où les éléments ont des valeurs différentes.

Dans la première Partie de ce travail nous établissons les équations différentielles auxquelles satisfont les coefficients.

Dans la deuxième, nous appliquons à ces équations ramenées à une forme canonique la méthode de transformation de Moutard.

Dans la troisième, nous tirons parti de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles due à Riemann (¹).

Enfin, dans une quatrième Partie, nous indiquons un moyen élémentaire de déterminer les coefficients de l'équation du quatrième ordre à laquelle satisfait un coefficient du développement de la fonction perturbatrice, considéré comme fonction de l'un des éléments.

(¹) Les principaux résultats de la troisième Partie ont été présentés à l'Académie des Sciences (séance du 28 janvier 1907).

PREMIÈRE PARTIE.

Nous nous plaçons dans le cas où, les excentricités étant nulles, l'inclinaison des orbites est notable. Il n'y a pas lieu alors de distinguer entre les anomalies moyennes et excentriques qu'on comptera à partir de la ligne des nœuds.

Δ désignant la distance des deux planètes, a et a' les rayons des orbites, σ l'angle des deux rayons vecteurs, on a

$$\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos \sigma;$$

mais

$$\cos \sigma = \cos^2 \frac{J}{2} \cos(u - u') + \sin^2 \frac{J}{2} \cos(u + u'),$$

J étant l'inclinaison mutuelle des plans des orbites et u et u' les anomalies des deux planètes.

Par suite,

$$\Delta^2 = a'^2 (1 + \alpha^2 - 2\mu\alpha \cos \xi - 2\nu\alpha \cos \eta),$$

où

$$u - u' = \xi, \quad u + u' = \eta, \quad \mu = \cos^2 \frac{J}{2}, \quad \nu = \sin^2 \frac{J}{2}$$

et

$$\alpha = \frac{a}{a'}.$$

Le développement en série de $\frac{1}{\Delta^{2s}}$, où s désigne un entier impair, constitue le développement de la fonction perturbatrice. Nous adopterons les notations de M. Poincaré et rappellerons quelques résultats établis par lui.

Posant $\frac{1}{\Delta^{2s}} = \frac{F^{-s}}{a'^{2s}}$, on considère le développement de $Z = F^{-s}$ suivant les puissances

$$Z = \Sigma \Pi_{mn} x^m y^n \quad \text{où} \quad x = E^{iu}, \quad y = E^{iu'},$$

en sorte que

$$F^{-s} = \left[1 + \alpha^2 - \alpha\mu \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \alpha\nu \left(xy + \frac{1}{xy} \right) \right]^{-s}.$$

Π_{mn} est une fonction des éléments α, μ, ν . Elle satisfait à un certain nombre

d'équations aux dérivées partielles qui se déduisent des considérations suivantes :

Z' et Z'' désignant les dérivées premières et secondes de Z par rapport à F , on a la série d'équations

$$(1) \quad \frac{\partial Z}{\partial \mu} = -2\alpha Z' \cos \xi,$$

$$(2) \quad \frac{\partial Z}{\partial \nu} = -2\alpha Z' \cos \eta,$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} = 2\alpha \mu Z' \cos \xi + 4\alpha^2 \mu^2 Z'' \sin^2 \xi,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} = 2\alpha \nu Z' \cos \eta + 4\alpha^2 \nu^2 Z'' \sin^2 \eta.$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2} = 4\alpha^2 Z'' \cos^2 \xi,$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \nu^2} = 4\alpha^2 Z'' \cos^2 \eta,$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu \partial \nu} = 4\alpha^2 Z'' \cos \xi \cos \eta;$$

puis, quatre équations en prenant des dérivées par rapport à α

$$(8) \quad \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = 2\alpha Z' - 2\mu Z' \cos \xi - 2\nu Z' \cos \eta,$$

$$(9) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2} = 2Z' + 4\alpha^2 Z'' + 4\mu^2 Z'' \cos^2 \xi + 4\nu^2 Z'' \cos^2 \eta \\ + 8\mu\nu Z'' \cos \xi \cos \eta - 8\alpha\mu Z'' \cos \xi - 8\alpha\nu Z'' \cos \eta,$$

$$(10) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \mu} = -2Z' \cos \xi + 4\alpha\mu Z'' \cos^2 \xi + 4\alpha\nu Z'' \cos \xi \cos \eta - 4\alpha^2 Z'' \cos \xi,$$

$$(11) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \nu} = -2Z' \cos \eta + 4\alpha\nu Z'' \cos^2 \eta + 4\alpha\mu Z'' \cos \xi \cos \eta - 4\alpha^2 Z'' \cos \eta.$$

On voit que les onze dérivées partielles du premier et du second ordres que nous venons d'écrire s'expriment en fonction linéaire des neuf expressions

$$\begin{array}{lll} Z', & Z' \cos \xi, & Z' \cos \eta, \\ Z'', & Z'' \cos \xi, & Z'' \cos \eta, \\ Z'' \cos^2 \xi, & Z'' \cos \xi \cos \eta, & Z'' \cos^2 \eta. \end{array}$$

Mais il existe entre ces neuf éléments et la fonction Z quatre relations obtenues : en prenant la dérivée logarithmique de $Z' = -sF^{-(s+1)}$; en multipliant les deux membres de l'identité obtenue, soit par $\cos \xi$, soit par $\cos \eta$; enfin, en prenant la dérivée logarithmique de $Z = F^{-s}$.

Cela donne les relations

$$\begin{aligned}
 (12) \quad 0 &= (s+1)Z' & + (1+\alpha^2)Z'' & - 2\alpha\mu Z'' \cos \xi & - 2\alpha\nu Z'' \cos \eta, \\
 (13) \quad 0 &= (s+1)Z' \cos \xi & + (1+\alpha^2)Z'' \cos \xi & - 2\alpha\mu Z'' \cos^2 \xi & - 2\alpha\nu Z'' \cos \xi \cos \eta, \\
 (14) \quad 0 &= (s+1)Z' \cos \eta & + (1+\alpha^2)Z'' \cos \eta & - 2\alpha\mu Z'' \cos \xi \cos \eta & - 2\alpha\nu Z'' \cos^2 \eta, \\
 (15) \quad -sZ &= & (1+\alpha^2)Z' & - 2\alpha\mu Z' \cos \xi & - 2\alpha\nu Z' \cos \eta.
 \end{aligned}$$

En somme, les neuf quantités Z' , $Z' \cos \xi$, ..., $Z'' \cos^2 \eta$, satisfaisant aux trois relations (12), (13), (14), six d'entre elles sont indépendantes. Elles permettront donc d'écrire, entre les douze quantités constituées par Z et ses dérivées partielles, six équations indépendantes que nous allons former. Remarquons de suite que ces équations fournissent aisément celles auxquelles satisfont les coefficients Π_{mn} ; car elles sont des identités en x et y et il suffira d'égaliser les coefficients de $x^m y^n$ dans les deux membres de ces équations obtenues pour Z . Il est immédiat que les coefficients de $x^m y^n$ sont

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} & \text{dans} \quad \frac{\partial Z}{\partial \mu}, \\
 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} & \text{dans} \quad \frac{\partial Z}{\partial \nu}, \\
 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \alpha} & \text{dans} \quad \frac{\partial Z}{\partial \alpha}, \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Et, comme on peut écrire

$$Z = \sum \Pi_{mn} E^{i \frac{(m+n)(n+u') + (m-n)(n-u')}{2}},$$

il en résulte que le coefficient de $x^m y^n$ sera

$$\begin{array}{ll}
 -\frac{(m-n)^2}{4} \Pi_{mn} & \text{dans} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2}, \\
 -\frac{(m+n)^2}{4} \Pi_{mn} & \text{dans} \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2}.
 \end{array}$$

Les équations (1), (2), (5), (6) fournissent successivement les valeurs

$$\begin{aligned}
 2Z' \cos \xi &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \mu}, & 2Z' \cos \eta &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \nu}, \\
 4Z'' \cos^2 \xi &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2}, & 4Z'' \cos^2 \eta &= \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \nu^2}.
 \end{aligned}$$

En tenant compte de ces valeurs, on déduit de (3) et (4) une première

équation

$$(A) \quad \mu^2 \nu^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} \right) + \mu \nu^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \mu^2 \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + (\mu^2 q^2 - \nu^2 p^2) \Pi = 0,$$

où l'on écrit Π au lieu de Π_{mn} et où

$$p = \frac{m-n}{2}, \quad q = \frac{m+n}{2}.$$

L'équation (7) donne

$$4Z'' \cos \xi \cos \eta = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu \partial \nu}.$$

Les équations (8), (10), (11) fournissent

$$\begin{aligned} Z, \quad Z'' \cos \xi, \quad Z'' \cos \eta, \\ \nu Z = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} - \frac{\mu}{\alpha^2} \frac{\partial Z}{\partial \mu} - \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{\partial Z}{\partial \nu}, \\ Z'' \cos \xi = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \mu} + \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2} + \frac{\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu \partial \nu} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \mu} \right), \\ Z'' \cos \eta = \frac{1}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial \nu} + \frac{\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 Z}{\partial \nu^2} + \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu \partial \nu} - \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \nu} \right). \end{aligned}$$

Toutes ces valeurs portées successivement dans les équations (9), (12), (13), (14), (15) nous donneront cinq équations nouvelles.

Les trois dernières nous fournissent, écrites dans l'ordre (15), (13), (14),

$$(B) \quad \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + \frac{\alpha(\alpha^2+1)}{\alpha^2-1} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2-1} \Pi = 0,$$

$$(C) \quad (\alpha^2-1) \left(\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + \nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} \right) + \alpha(\alpha^2+1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \mu} + [\alpha^2(2s+1)-1] \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = 0,$$

$$(D) \quad (\alpha^2-1) \left(\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} + \mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} \right) + \alpha(\alpha^2+1) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \nu} + [\alpha^2(2s+1)-1] \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = 0.$$

On voit que ce groupe d'équations est indépendant de p et de q . Tous les coefficients Π pour lesquels l'indice s est le même satisfont donc à ces trois équations.

Mais on vérifie immédiatement que (C) et (D) s'écrivent

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[(\alpha^2-1) \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right) + \alpha(\alpha^2+1) \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + 2s\alpha^2 \Pi \right] = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left[(\alpha^2-1) \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right) + \alpha(\alpha^2+1) \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + 2s\alpha^2 \Pi \right] = 0.$$

L'ensemble des trois équations (B), (C), (D) se réduit donc à l'équation du premier ordre (B).

On obtient une équation équivalente à l'équation (12) de la manière suivante :

L'élimination de (Z') entre les équations (8) et (9) donne une valeur de Z''

$$4\alpha^4 Z'' = \mu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2} + 2\mu\nu \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu \partial \nu} + \nu^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \nu^2} + 3\left(\mu \frac{\partial Z}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial Z}{\partial \nu}\right) \\ + \alpha^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha^2} - 2\alpha\mu \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \mu} - 2\alpha\nu \frac{\partial^2 Z}{\partial \alpha \partial \nu} - \alpha \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$$

qui, mise à la place de Z'' dans le second membre de la relation (12), fournit l'équation

$$\alpha^2(1 + \alpha^2) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} + (1 - \alpha^2) \left[\mu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + 2\mu\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} + \nu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} \right] - 2\alpha\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \mu} - 2\alpha\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \nu} \\ - [2(s+2)\alpha^2 - 3(1 + \alpha^2)] \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right) + [2\alpha^2(s+1) - (1 + \alpha^2)] \alpha \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0.$$

On donne à cette équation une forme un peu plus simple en lui ajoutant

$$2 \times (B) + (C) + (D),$$

d'où il résulte

$$(E) \quad \alpha^2(1 + \alpha^2) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} + (\alpha^2 - 1) \left(\alpha\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \mu} + \alpha\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \nu} \right) \\ + [2\alpha^2(s+1) + (1 + \alpha^2)] \alpha \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + 2\alpha^2 \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right) + 4s\alpha^2 \Pi = 0.$$

Et l'on vérifierait sans peine que le premier membre de (E) n'est autre chose que le premier membre de (B), dérivé par rapport à α et multiplié ensuite par α .

La dernière des six équations prévues s'obtiendra en portant dans l'expression (9) les valeurs tirées pour Z' , $Z' \cos \xi$, ..., $Z'' \cos^2 \eta$ des huit équations précédentes. On obtient

$$(F) \quad \frac{\alpha^2}{2\mu^2} \left(\mu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - p^2 \Pi \right) + \frac{\alpha^2}{2\nu^2} \left(\nu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} - q^2 \Pi \right) \\ = \mu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + 2\mu\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} + \nu^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^2} \\ - 2\alpha\mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \mu} - 2\alpha\nu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha \partial \nu} + 3 \left(\mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} \right) - \alpha \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}.$$

On remarque que, sur les six équations (A), (B), (C), (D), (E), (F), deux seulement, la première et la dernière, dépendent de p et de q . Les quatre autres, qui se réduisent d'ailleurs à (B), comme nous l'avons vu, sont donc communes à tous les coefficients du développement de la fonction perturbatrice.

Les relations entre la fonction Π et ses dérivées, indépendantes de p et de q , c'est-à-dire des indices m et n , se déduisent aussi facilement de la valeur des coefficients exprimés sous forme d'intégrale double

$$-4\pi^2 \Pi_{mn} = \iint \frac{dx dy}{x^m y^n [xy \{(1 + \alpha^2)xy - \alpha\mu(x^2 + y^2) - \alpha\nu(x^2 y^2 + 1)\}]^{s+1}},$$

x et y étant deux variables imaginaires assujetties à décrire dans leurs plans respectifs les cercles

$$|x| = 1, \quad |y| = 1.$$

Les points singuliers de cette intégrale double dépendent de μ, ν, α . Faisons varier μ par exemple; on peut toujours s'arranger de façon que, si μ devient $\mu + d\mu$, les points singuliers de l'intégrale n'arrivent pas sur le chemin d'intégration $|x| = 1, |y| = 1$. On peut alors, pour prendre les dérivées $\frac{\partial \Pi}{\partial \mu}, \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}, \dots$, dériver uniquement les fonctions sous le signe $\iint$

$$4\pi^2 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} = s\alpha \iint \frac{xy(x^2 + y^2) dx dy}{x^m y^n R^{s+1}}$$

en posant

$$R = xy[(1 + \alpha^2)xy - \alpha\mu(x^2 + y^2) - \alpha\nu(x^2 y^2 + 1)].$$

Comme nous prendrons des dérivées secondes et qu'apparaîtra ainsi R^{s+2} au dénominateur, multiplions numérateur et dénominateur par R . On aura ainsi

$$(16) \quad -4\pi^2 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} = s\alpha[(1 + \alpha^2)(\Pi_{33} + \Pi_{33}) - \alpha\mu(\Pi_{62} + 2\Pi_{44} + \Pi_{26}) - \alpha\nu(\Pi_{64} + \Pi_{42} + \Pi_{24} + \Pi_{46})]$$

où, dans le second membre, Π_{ij} représente le coefficient $\Pi_{m-i, n-j}$ relatif à l'exposant $(s+2)$.

On a de même

$$(17) \quad -4\pi^2 \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} = s\alpha[(1 + \alpha^2)(\Pi_{33} + \Pi_{33}) - \alpha\mu(\Pi_{64} + \Pi_{42} + \Pi_{24} + \Pi_{46}) - \alpha\nu(\Pi_{66} + 2\Pi_{44} + \Pi_{22})].$$

La dérivée prise par rapport à α donne la relation

$$(18) \quad \begin{aligned} & -4\pi^2 \left(\alpha \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \alpha} - \mu \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} - \nu \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} \right) \\ & = -2s\alpha^2 [(1 + \alpha^2) \Pi_{44} - \alpha\mu(\Pi_{53} + \Pi_{35}) - \alpha\nu(\Pi_{55} + \Pi_{33})]. \end{aligned}$$

Or si, dans l'expression de Π_{mn} , on multiplie le numérateur et le dénominateur par R , on a immédiatement

$$(19) \quad -4\pi^2 \left(\Pi_{mn} + \frac{\mu}{s} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} \right) = (1 + \alpha^2) \int \int \frac{x^2 y^2 dx dy}{x^m y^n R^{s+1}},$$

ce qui donne

$$(19^{bis}) \quad \begin{aligned} & -4\pi^2 \left(\Pi_{mn} + \frac{\mu}{s} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} + \frac{\nu}{s} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} \right) \\ & = (1 + \alpha^2) [(1 + \alpha^2) \Pi_{44} - \alpha\mu(\Pi_{53} + \Pi_{35}) - \alpha\nu(\Pi_{55} + \Pi_{33})]. \end{aligned}$$

La comparaison de (18) et (19^{bis}), c'est-à-dire l'élimination de l'expression entre crochets qui figure dans les seconds membres, nous donne précisément l'équation (B) obtenue précédemment

$$(B) \quad \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi = 0.$$

On trouve de même successivement

$$(20) \quad -4\pi^2 \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \mu^2} = s(s+1)\alpha^2 [\Pi_{62} + 2\Pi_{44} + \Pi_{26}],$$

$$(21) \quad -4\pi^2 \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \mu \partial \nu} = s(s+1)\alpha^2 [\Pi_{64} + \Pi_{42} + \Pi_{24} + \Pi_{46}],$$

$$(22) \quad -4\pi^2 \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \nu^2} = s(s+1)\alpha^2 [\Pi_{66} + 2\Pi_{44} + \Pi_{22}];$$

puis

$$(23) \quad -4\pi^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \alpha \partial \mu} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} - \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \mu^2} - \frac{\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \mu \partial \nu} \right) = -2s(s+1)\alpha^2 [\Pi_{55} + \Pi_{33}],$$

$$(24) \quad -4\pi^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \alpha \partial \nu} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} - \frac{\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \nu^2} - \frac{\mu}{\alpha} \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \mu \partial \nu} \right) = -2s(s+1)\alpha^2 [\Pi_{55} + \Pi_{33}],$$

$$(25) \quad \begin{aligned} & -4\pi^2 \left[\frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \left(\mu \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \alpha \partial \mu} + \nu \frac{\partial^2 \Pi_{mn}}{\partial \alpha \partial \nu} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \left(\mu \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \nu} \right) - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Pi_{mn}}{\partial \alpha} \right] \\ & = 2s(s+1)\alpha [2\alpha\Pi_{44} - \mu(\Pi_{53} + \Pi_{35}) - \nu(\Pi_{55} + \Pi_{33})]; \end{aligned}$$

et l'élimination des quantités entre crochets qui figurent dans les seconds

membres des équations (16), (17), (19^{bis}), (20), (21), (22), (23), (24), (25), à savoir les six expressions

$$\begin{aligned} &(\Pi_{44}), & (\Pi_{33} + \Pi_{53}), & (\Pi_{55} + \Pi_{33}), \\ &(\Pi_{62} + 2\Pi_{44} + \Pi_{26}), & (\Pi_{64} + \Pi_{42} + \Pi_{24} + \Pi_{46}), & (\Pi_{66} + 2\Pi_{44} + \Pi_{22}), \end{aligned}$$

fournit trois équations qui sont celles trouvées précédemment et désignées par les lettres (C), (D), (E) et qu'on obtient en dérivant l'équation (B) successivement par rapport à μ , ν , α .

Toutes les équations que nous venons de retrouver [(B), (C), (D), (E)] sont indépendantes de m et de n .

On peut se demander s'il ne serait pas possible de retrouver également les deux équations (A) et (F), ou des équations équivalentes à celles-là. Il faudrait, pour cela, avoir en nombres suffisants des relations entre les coefficients où figurassent les indices m et n de Π_{mn} . Or, M. Poincaré a montré ⁽¹⁾ que, dans le cas qui nous occupe, cinq coefficients Π étaient liés par une relation linéaire à coefficients rationnels qu'on peut obtenir en égalant, dans les deux membres de l'identité suivante, le coefficient de $x^m y^n$,

$$x \Delta^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{\Delta^{2s}} \right) = - \frac{s x}{\Delta^{2s}} \frac{d\Delta^2}{dx}.$$

Appliquée aux coefficients qui figurent dans les seconds membres des équations (16) à (25) et qui sont relatifs à l'exposant $s + 2$, cette identification fournit cinq relations

$$\begin{aligned} \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} (m - 4) \Pi_{44} &= \mu(m - 5 - s) \Pi_{33} + \mu(m - 3 + s) \Pi_{53} + \nu(m - 5 - s) \Pi_{33} + \nu(m - 3 + s) \Pi_{53}, \\ \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} (m - 3) \Pi_{33} &= \mu(m - 4 - s) \Pi_{24} + \mu(m - 2 + s) \Pi_{42} + \nu(m - 4 - s) \Pi_{22} + \nu(m - 2 + s) \Pi_{44}, \\ \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} (m - 5) \Pi_{55} &= \mu(m - 6 - s) \Pi_{46} + \mu(m - 4 + s) \Pi_{64} + \nu(m - 6 - s) \Pi_{44} + \nu(m - 4 + s) \Pi_{66}, \\ \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} (m - 3) \Pi_{35} &= \mu(m - 4 - s) \Pi_{26} + \mu(m - 2 + s) \Pi_{44} + \nu(m - 4 - s) \Pi_{24} + \nu(m - 2 + s) \Pi_{46}, \\ \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} (m - 5) \Pi_{53} &= \mu(m - 6 - s) \Pi_{44} + \mu(m - 4 + s) \Pi_{62} + \nu(m - 6 - s) \Pi_{42} + \nu(m - 4 + s) \Pi_{64}, \end{aligned}$$

et l'élimination des treize coefficients figurant dans les égalités précédentes entre les dix relations trouvées précédemment et les cinq nouvelles fournirait

⁽¹⁾ *Cours de Mécanique céleste*, t. II, p. 130.

deux équations aux dérivées partielles qui ne seraient plus alors communes à tous les coefficients Π_{mn} .

Si au coefficient Π_{44} on fait correspondre le point du plan de coordonnées 4, 4, ..., on voit qu'on obtient treize points du plan qui sont situés sur les côtés de deux carrés concentriques et au centre même de ce carré.

On a pu remarquer les expressions symétriques de $\frac{\partial \Pi}{\partial \mu}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial \nu}$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu}$, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}$. Elles se généralisent aisément. Une dérivée d'ordre k de la fonction Π s'exprime au moyen de coefficients relatifs à l'indice $s + k$ et dont les points représentatifs sont distribués au centre et sur les côtés de k carrés concentriques.

On peut écrire, par exemple,

$$\frac{1}{\alpha^k} \frac{\partial^k \Pi_{mn}}{\partial \mu^k} = s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)(\Pi_{31} + \Pi_{13})^k \text{ symbol.}$$

où, dans le développement du second membre par la formule du binôme, le terme $C_\lambda^\mu (\Pi_{31})^\lambda (\Pi_{13})^\mu$ est une expression symbolique qu'il faut traduire par

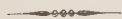
$$C_\lambda^\mu \Pi_{3\lambda+\mu, \lambda+3\mu}.$$

De même on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{\alpha^k} \frac{\partial^k \Pi_{mn}}{\partial \nu^k} = s(s+1)(s+2)\dots(s+k-1)(\Pi_{33} + \Pi_{11})^k \text{ symbol.}$$

et

$$\frac{1}{\alpha^{k+k'}} \frac{\partial^{k+k'} \Pi_{mn}}{\partial \mu^k \partial \nu^{k'}} = s(s+1)(s+2)\dots(s+k+k'-1)(\Pi_{31} + \Pi_{13})^k \text{ symbol. } (\Pi_{33} + \Pi_{11})^{k'} \text{ symbol.}$$



DEUXIÈME PARTIE.

Les équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre auxquelles satisfait le coefficient Π_{mn} de $x^m y^n$ dans le développement de la fonction perturbatrice ont été obtenues en considérant Π_{mn} comme une fonction de trois variables indépendantes α, μ, ν .

Ces équations sont

$$(A) \quad \mu^2 \nu^2 \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} \right) + \mu \nu^2 \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \mu^2 \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + (\mu^2 q^2 - \nu^2 p^2) \Pi = 0,$$

$$(B) \quad \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} + \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} + \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi = 0$$

et une troisième équation désignée dans la première Partie par la lettre (F), beaucoup plus compliquée que les deux équations précédentes et dont nous ne ferons pas usage.

On se rappelle la signification de μ et de ν

$$\mu = \cos^2 \frac{J}{2}, \quad \nu = \sin^2 \frac{J}{2}.$$

Donc μ et ν ne sont pas en réalité des variables indépendantes; et, en tenant compte de la relation $\mu + \nu = 1$, on peut rechercher les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfait le coefficient Π_{mn} , μ et α étant les seules variables indépendantes. Cela revient à éliminer ν entre (A), (B), (F). Nous n'aurons, pour l'objet qui nous occupe, qu'à considérer le résultat de l'élimination entre (A) et (B).

Comme il ne peut y avoir de confusion, nous écrirons dans ce qui suit Π au lieu de Π_{mn} . Convenons de désigner par $\frac{d}{d\mu}$ la dérivée de Π par rapport à μ quand on considère Π comme fonction de μ et α seulement, c'est-à-dire quand on y suppose ν remplacé par sa valeur $1 - \mu$; et convenons de désigner par $\frac{\partial}{\partial \mu}$ la dérivée de Π par rapport à μ quand on considère Π comme fonction de μ, ν, α .

On a évidemment

$$\frac{d\Pi}{d\mu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \frac{\partial \Pi}{\partial \nu};$$

d'où

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \frac{d\Pi}{d\mu}.$$

En portant cette valeur de $\frac{\partial \Pi}{\partial \nu}$ dans (B), on aura la valeur de $\frac{\partial \Pi}{\partial \mu}$

$$(\mu + \nu) \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \nu \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi;$$

car il faut remarquer que

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \frac{d\Pi}{d\alpha}.$$

La valeur de $\frac{\partial \Pi}{\partial \nu}$ sera donnée alors par

$$(\mu + \nu) \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = -\mu \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi.$$

L'opération

$$\frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{d}{d\mu},$$

appliquée successivement aux deux équations

$$(1) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \nu \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi,$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = -\mu \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi,$$

nous fournit les deux relations suivantes entre les dérivées partielles du second ordre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} &= \nu \frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} - \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d^2 \Pi}{d\alpha d\mu} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\mu}, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu \partial \nu} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} &= -\mu \frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} - \frac{d\Pi}{d\mu} - \frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d^2 \Pi}{d\alpha d\mu} - \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\mu}. \end{aligned}$$

L'addition membre à membre de ces deux dernières équations donnera la valeur de $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}$ qui figure dans (B)

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2} = (\nu - \mu) \frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} - \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d^2 \Pi}{d\alpha d\mu} - \frac{(4s + 2)\alpha^2 - 2}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\mu}.$$

Les équations (1) et (2) nous donnent la combinaison

$$(4) \quad \nu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = (\mu^2 + \nu^2) \frac{d\Pi}{d\mu} + (\mu - \nu) \left[\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} + \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi \right].$$

En substituant ces valeurs de $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \nu^2}$ et de $\nu \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}$ dans l'équation (A), on obtient l'équation suivante aux seules variables indépendantes α et μ

$$(A') \quad \mu^2 \nu^2 \left[(\nu - \mu) \frac{d^2 \Pi}{d\mu^2} - \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d^2 \Pi}{d\alpha d\mu} - \frac{(4s + 2)\alpha^2 - 2}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\mu} \right] \\ + \mu\nu(\mu^2 + \nu^2) \frac{d\Pi}{d\mu} + \mu\nu(\mu - \nu) \left[\frac{\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} \frac{d\Pi}{d\alpha} + \frac{2s\alpha^2}{\alpha^2 - 1} \Pi \right] + (\mu^2 q^2 - \nu^2 p^2) \Pi = 0$$

avec

$$\mu + \nu = 1.$$

C'est à l'étude de cette équation (A') que nous allons nous attacher.

La notion de caractéristiques est connue. Étant donnée l'équation du second ordre

$$A \frac{d^2 Z}{dx^2} + 2B \frac{d^2 Z}{dx dy} + C \frac{d^2 Z}{dy^2} + \dots = 0,$$

les caractéristiques sont les lignes définies par l'équation

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0$$

et, si $B^2 - AC$ est positif, l'équation, dite du *type hyperbolique*, a ses caractéristiques réelles.

Les familles de caractéristiques de l'équation (A') sont donc déterminées par l'équation

$$(\nu - \mu) d\alpha^2 + \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} d\alpha d\mu = 0$$

qui se décompose en

$$d\alpha = 0 \quad \text{et} \quad (1 - 2\mu) d\alpha + \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{\alpha^2 - 1} d\mu = 0.$$

Ces dernières fournissent les familles de caractéristiques

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{et} \quad \frac{(2\mu - 1)\alpha}{\alpha^2 + 1} = \text{const.}$$

Le changement de variables

$$\alpha = x, \quad \frac{(2\mu - 1)\alpha}{\alpha^2 + 1} = y$$

réduit l'équation du second ordre (A') à la forme simple

$$\frac{d^2 \Pi}{dx dy} + a \frac{d\Pi}{dx} + b \frac{d\Pi}{dy} + c \Pi = 0,$$

avec

$$a = -\frac{(\mu - \nu)(1 + x^2)}{4x\mu\nu} = -\frac{y(1 + x^2)^2}{x^2 - y^2(1 + x^2)^2},$$

$$b = \frac{(1 - x^2) + 8s\alpha^2\mu\nu}{4x\mu\nu(1 + x^2)} = \frac{2sx}{1 + x^2} + \frac{x(1 - x^2)}{(1 + x^2)[x^2 - y^2(1 + x^2)^2]}$$

et

$$c = \frac{-2sxy(1 + x^2)}{x^2 - y^2(1 + x^2)^2} + \frac{1 - x^2}{[x^2 - y^2(1 + x^2)^2]^2} \{ q^2[x + y(x^2 + 1)]^2 - p^2[x - y(x^2 + 1)]^2 \}.$$

La méthode d'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles due à Laplace introduit dans la théorie deux fonctions h et k jouissant de certaines propriétés d'invariance (¹),

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c,$$

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

C'est ainsi qu'un changement de fonction $\Pi = \lambda \Pi'$ transformera notre équation du second ordre en une équation de même forme

$$\frac{d^2 \Pi'}{dx dy} + a' \frac{d \Pi'}{dx} + b' \frac{d \Pi'}{dy} + c' \Pi' = 0$$

ou

$$a' = a + \frac{\partial \log \lambda}{\partial y},$$

$$b' = b + \frac{\partial \log \lambda}{\partial x},$$

$$c' = c + a \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} + b \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}$$

et qui admet les mêmes invariants h et k .

Dans le cas où $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y}$, les deux invariants sont égaux et l'équation peut se ramener à une forme canonique particulièrement simple.

Or, c'est le cas de l'équation à laquelle satisfait Π .

Des valeurs écrites pour a et b on déduit, en effet,

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{2xy(1 + x^2)(1 - x^2)}{[x^2 - y^2(1 + x^2)^2]^2}.$$

(¹) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, Liv. IV, Chap. II.

Opérons donc le changement de fonction

$$\Pi = \lambda \Pi',$$

λ étant une fonction de x et de y définie par les deux expressions compatibles

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = -a,$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} = -b,$$

en sorte que Π' satisfera à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial y} + c' \Pi' = 0.$$

La condition

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial y} = -a = \frac{y(1+x^2)^2}{x^2 - y^2(1+x^2)^2}$$

donne

$$\lambda = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - y^2(1+x^2)^2}},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction de x définie par

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial x} = -b,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} - \frac{x - 2xy^2(1+x^2)}{x^2 - y^2(1+x^2)^2} = \frac{-2sx}{1+x^2} + \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)[x^2 - y^2(1+x^2)^2]},$$

ce qui donne

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{2(1-s)x}{1+x^2}$$

et, par suite,

$$\varphi(x) = C(1+x^2)^{1-s},$$

C étant une constante numérique.

La fonction nouvelle Π' et l'ancienne Π satisferont donc à la relation

$$(5) \quad \Pi = C(1+x^2)^{1-s}[x^2 - y^2(1+x^2)^2]^{-\frac{1}{2}} \Pi'.$$

Des propriétés d'invariance de h et du fait que a' et b' sont nuls on conclut que

$$c' = -h.$$

Or

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + (ab - c),$$

ce qui fournit, pour la valeur de h ,

$$h = \frac{xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} - \frac{(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} \{ q^2[x+y(1+x^2)]^2 - p^2[x-y(1+x^2)^2] \}.$$

L'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction Π' s'écrit en somme

$$(6) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial y} = \frac{Axy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} + \frac{B(1-x^2)[x^2+y^2(1+x^2)^2]}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2}$$

avec

$$(7) \quad \begin{cases} A = 1 - 2p^2 - 2q^2, \\ B = p^2 - q^2. \end{cases}$$

Nous allons rechercher une solution particulière de cette équation (6) de la forme e^u , ce qui exigera que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = h.$$

On remarque que h est une somme de deux termes, dont chacun peut être considéré comme une dérivée seconde, prise par rapport à x et à y , de fonctions que deux quadratures très simples détermineront.

A un facteur numérique près, $\frac{xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2}$ est la dérivée seconde, prise par rapport à x et par rapport à y , de

$$L \frac{1+x^2}{\sqrt{x^2-y^2(1+x^2)^2}},$$

et $\frac{(1-x^2)[x^2+y^2(1+x^2)^2]}{x^2-y^2(1+x^2)^2}$ est la dérivée seconde, prise par rapport à x et par rapport à y , de

$$L \frac{y(x^2+1)+x}{y(x^2+1)-x}.$$

Ces deux fonctions logarithmiques ont pour dérivées premières, prises par

L.

rapport à x , puis par rapport à y , les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{L} \frac{y(x^2+1)+x}{y(x^2+1)-x} &= -\frac{2y(1-x^2)}{x^2-y^2(1+x^2)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{L} \frac{(1+x^2)}{\sqrt{x^2-y^2(1+x^2)^2}} &= -\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)[x^2-y^2(1+x^2)^2]}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{L} \frac{y(x^2+1)+x}{y(x^2+1)-x} &= \frac{2x(1+x^2)}{x^2-y^2(1+x^2)^2}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{L} \frac{(1+x^2)}{\sqrt{x^2-y^2(1+x^2)^2}} &= \frac{y(1+x^2)^2}{x^2-y^2(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Et l'on voit, par suite, que, si l'on donne à u la valeur

$$u = \mathbf{C}_1 \mathbf{L} \frac{y(x^2+1)+x}{y(x^2+1)-x} + \mathbf{C}_2 \mathbf{L} \frac{1+x^2}{\sqrt{x^2-y^2(1+x^2)^2}},$$

$\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$ étant deux constantes à déterminer, chacun des termes du produit $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$, qui devient

$$-(4\mathbf{C}_1^2 + \mathbf{C}_2^2) \frac{xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(x^2+1)^2]^2} - 2\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 \frac{(1-x^2)[x^2+y^2(1+x^2)^2]}{[x^2-y^2(x^2+1)^2]^2},$$

a même forme que les deux expressions qui figurent dans h .

Une solution particulière de l'équation (6) est donc e^u , u étant la fonction que nous venons de déterminer.

Une identification donne les valeurs des deux constantes $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$. On obtient

$$\begin{aligned}4\mathbf{C}_1^2 + \mathbf{C}_2^2 + 2\mathbf{C}_2 &= -\mathbf{A}, \\ 2\mathbf{C}_1(1+\mathbf{C}_2) &= -\mathbf{B} \quad \text{ou} \quad 4\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_1 = -2\mathbf{B}.\end{aligned}$$

En additionnant et retranchant ces équations membre à membre, on a le système équivalent

$$\begin{aligned}(2\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2)^2 + 2(2\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2) + (2\mathbf{B} + \mathbf{A}) &= 0, \\ (2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)^2 - 2(2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2) - (2\mathbf{B} - \mathbf{A}) &= 0;\end{aligned}$$

ce qui donne, en tenant compte des valeurs de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$,

$$(8) \quad \begin{cases} 2\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = -1 \pm 2q, \\ 2\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 = -1 \pm 2p. \end{cases}$$

On a de la sorte quatre systèmes de valeurs pour $\mathbf{C}_1$ et $\mathbf{C}_2$, ce qui fournit au

tant de solutions particulières pour l'équation (6); nous adopterons l'un quelconque de ces quatre systèmes.

Cette équation (6) a ses termes indépendants de s ; p et q y figurent élevés au carré, ce qui était à prévoir, puisque le coefficient Π , et par suite Π' , conserve la même valeur, quand on intervertit m et n :

$$\Pi_{mn} = \Pi_{nm}.$$

Elle est de la forme des équations dites *équations de Moutard*, dont ce géomètre a fait l'étude dans le XLV^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. La méthode de Moutard repose sur un théorème que nous allons rappeler (¹).

Soit l'équation

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \lambda(xy).$$

Posant $\mathfrak{F}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, supposons que nous connaissions une solution particulière ω de l'équation, en sorte que

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \lambda(xy).$$

On peut alors écrire

$$\omega \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \lambda z \right) = \omega \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Et l'équation proposée est équivalente à la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0,$$

qui exprime que

$$\left(\omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dx - \left(\omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dy$$

est la différentielle exacte d'une certaine fonction $\theta(xy)$.

On peut donc à chaque solution z associer une fonction θ , telle que l'on ait

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad - \frac{\partial \theta}{\partial y} = \omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

La fonction θ satisfait à une équation différentielle du second ordre, obtenue

(¹) Cf. DARBOUX, *loc. cit.*

en éliminant z entre les deux relations précédentes, qui peuvent s'écrire

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{\omega} \right), \quad - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\omega} \right);$$

par suite,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0,$$

ou bien

$$\omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

Or, si l'on opère le changement de fonction

$$\theta = \omega \sigma,$$

l'équation en σ devient

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} = \mu.$$

Et M. Darboux détermine μ sans calcul, par cette remarque que, l'équation en θ admettant la solution $\theta = 1$, l'équation en σ admettra la solution $\sigma = \frac{1}{\omega}$. L'équation en σ s'écrit donc

$$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

et l'on a pour valeur de σ , exprimée en fonction de z ,

$$\sigma = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1}{\omega} \int \left[\omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z}{\omega} \right) dx - \omega^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{z}{\omega} \right) dy \right];$$

réciroquement z s'exprime en fonction de σ

$$z = \omega \int \left[\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} (\omega \sigma) dx - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial y} (\omega \sigma) dy \right].$$

Le théorème suivant est donc établi :

A toute solution ω de l'équation

$$\mathcal{F}(z) = \lambda.$$

on sait faire correspondre par une simple quadrature une solution de l'équation

$$\mathcal{F}(\sigma) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

La connaissance de l'intégrale générale de l'une des équations permet de déterminer l'intégrale générale de l'autre équation.

Il y a évidemment réciprocité entre les deux équations.

Appliquons donc à notre équation (6)

$$\frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial y} = h$$

la transformation de Moutard, la solution particulière servant à la transformation étant la fonction e^u que nous avons déterminée précédemment.

On obtiendra l'équation

$$\frac{1}{\Pi''} \frac{\partial^2 \Pi''}{\partial x \partial y} = h';$$

et l'on a vu que la valeur du second membre est

$$h' = \tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{e^u}\right),$$

où

$$u = C_1 L \frac{y(x^2+1)+x}{y(x^2+1)-x} + C_2 L \frac{1+x^2}{\sqrt{x^2-y^2(1+x^2)^2}},$$

et

$$\tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{e^u}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

ce qui donne; d'après les valeurs écrites précédemment pour les dérivées partielles des fonctions logarithmiques qui figurent dans l'expression de u ,

$$\tilde{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{e^u}\right) = \frac{A'xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} + \frac{B'(1-x^2)[x^2+y^2(1+x^2)^2]}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2}$$

avec

$$A' = -(4C_1^2 + C_2^2 - 2C_2),$$

$$B' = -2C_1(C_2 - 1).$$

L'équation du second ordre, à laquelle satisfait Π'' , a donc un second membre h' de même forme que le second membre h de l'équation à laquelle satisfaisait Π' .

Cherchons l'expression des coefficients A' et B' en fonction de p et de q , au moyen des équations (8) qui peuvent s'écrire

$$2C_1 + C_2 = -1 + \varepsilon' 2q,$$

$$2C_1 - C_2 = -1 + \varepsilon 2p,$$

ε et ε' ayant, indépendamment l'un de l'autre, la valeur $+1$ ou -1 .

On trouve de la sorte

$$(9) \quad \begin{cases} A' = 1 - 2(p + \varepsilon)^2 - 2(q - \varepsilon')^2, \\ B' = (p + \varepsilon)^2 - (q - \varepsilon')^2, \end{cases}$$

valeurs qu'il convient de rapprocher de celles qui expriment A et B par les formules (7).

Par suite, l'équation

$$(10) \quad \frac{1}{\Pi''} \frac{\partial^2 \Pi''}{\partial x \partial y} = h',$$

obtenue par une première transformation de Moutard, n'est autre chose que l'équation (6) dans laquelle on aurait remplacé p et q par $p \pm 1$, $q \pm 1$, aucune correspondance n'étant établie entre les signes $+$ et $-$.

En tenant compte des valeurs

$$p = \frac{m - n}{2}, \quad q = \frac{m + n}{2},$$

on arrive à cette conclusion :

Alors que l'équation (6) est celle qui correspond, après un changement de fonction, au coefficient Π_{mn} du développement de la fonction perturbatrice, sa transformée (10) correspond, suivant les valeurs choisies pour ε et ε' , à l'un des quatre coefficients

$$\Pi_{m, n-2}, \quad \Pi_{m, n+2}, \quad \Pi_{m-2, n}, \quad \Pi_{m+2, n}.$$

Si l'on rappelle que m et n sont nécessairement de même parité, comme cela résulte du fait que $\frac{1}{\Delta^{2s}}$ conserve même valeur quand on change simultanément x et y en $-x$ et $-y$, on est conduit au résultat suivant :

Les équations telles que (6), convenant à un coefficient quelconque du développement de la fonction perturbatrice, dériveront, après un certain nombre de transformations de Moutard, de l'une des deux équations relatives au coefficient Π_{00} ou au coefficient Π_{11} .

Ces deux équations, qui correspondent, la première au cas où $p = q = 0$, la seconde au cas où $p = 0$, $q = 1$, sont

$$(11) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial y} = \frac{xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2 - y^2(1+x^2)^2]^2},$$

$$(12) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial x \partial y} = \frac{-xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2 - y^2(1+x^2)^2]^2} - \frac{(1-x^2)[x^2 + y^2(1+x^2)^2]}{[x^2 - y^2(1+x^2)^2]^2}.$$

Les équations (6), (11), (12) appartiennent au groupe des équations harmoniques, c'est-à-dire des équations de la forme

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1(x+y) + f_2(x-y).$$

Nous n'opérerons la réduction à cette forme que pour les équations (11) et (12).

Le second membre de l'équation (11) peut s'écrire

$$\frac{\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \mathcal{Y}}{\left[\frac{x^2}{(1+x^2)^2} - \mathcal{Y}^2 \right]^2},$$

et, si l'on pose

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{X} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \\ \mathbf{Y} = \mathcal{Y}^2, \end{cases}$$

le second membre devient

$$\frac{1}{4} \frac{\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y}}{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^2}.$$

Le changement de variable (13) donnera donc à l'équation (11) la forme simple

$$(14) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{Y}} = \frac{1}{4} \frac{1}{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^2}.$$

Le second membre de l'équation (12) peut s'écrire

$$-(1-x^2) \left\{ \frac{[x+y(1+x^2)]^2}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} - \frac{xy(1+x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} \right\},$$

ou encore

$$\frac{xy(1+x^2)(1-x^2)}{[x^2-y^2(1+x^2)^2]^2} - \frac{1-x^2}{[x-y(1+x^2)]^2}.$$

Si l'on effectue alors le changement de variable défini par les formules

$$(15) \quad \begin{cases} \mathbf{X} = \frac{x}{1+x^2}, \\ \mathbf{Y} = y, \end{cases}$$

l'équation (12) se mettra sous la forme

$$(16) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial X \partial Y} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(X+Y)^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(X-Y)^2}.$$

Ce même changement de variable (15) eût d'ailleurs transformé l'équation (11) en la suivante :

$$\frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial X \partial Y} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(X-Y)^2} - \frac{1}{(X+Y)^2} \right].$$

Ce sont les équations (14) et (16) que nous allons étudier dans la suite, et dont nous tirerons parti pour déterminer, par la méthode d'intégration de Riemann, les coefficients du développement de la fonction perturbatrice.



TROISIÈME PARTIE.

Nous allons rappeler les principes de la méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles, due à Riemann, en les restreignant au cas particulier qui nous intéresse.

Soit le polynôme différentiel ⁽¹⁾

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz,$$

où z est une fonction de x et de y . Désignons par u une deuxième fonction des mêmes variables. On peut alors au polynôme $\mathcal{F}(z)$ adjoindre un polynôme $\mathcal{G}(u)$ tel que l'on ait

$$(1) \quad u \mathcal{F}(z) - z \mathcal{G}(u) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$

Cela résulte, en effet, des identités

$$\begin{aligned} u \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right) + z \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \\ u a \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (auz) - z \frac{\partial}{\partial x} (au), \\ u b \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (buz) - z \frac{\partial}{\partial y} (bu). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{G}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (au) - \frac{\partial}{\partial y} (bu) + cu$$

ou

$$\mathcal{G}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y} \right) u.$$

et que

$$(2) \quad \begin{cases} M = auz + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ N = buz + \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{cases}$$

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. IV.

L'équation $\mathfrak{G}(u) = 0$ est dite *l'équation adjointe* de $\mathfrak{F}(z) = 0$. On démontre que $\mathfrak{F}(z)$ est à son tour le polynôme adjoint de $\mathfrak{G}(u)$.

Dans le cas où $a = b = 0$, qui sera celui que nous aurons à envisager, l'équation proposée est identique à son adjointe.

Soit, dans le plan des xy , (A) une aire simplement connexe limitée par un contour (C).

On aura

$$\iint_{(A)} [u \mathfrak{F}(z) - z \mathfrak{G}(u)] dx dy = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Cette intégrale double pourra être remplacée par l'intégrale simple

$$\int_{(C)} (\mathbf{M} dy - \mathbf{N} dx)$$

étendue au contour (C) pris dans le sens direct; cela suppose seulement que $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ ainsi que leurs dérivées premières sont finies et continues dans l'aire (A).

C'est l'équation

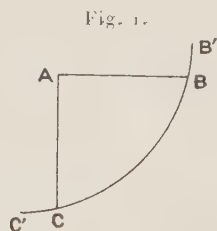
$$\iint_{(A)} [u \mathfrak{F}(z) - z \mathfrak{G}(u)] dx dy = \int_{(C)} \mathbf{M} dy - \mathbf{N} dx$$

dont Riemann fait usage.

Si z et u sont respectivement solution de $\mathfrak{F}(z) = 0$, $\mathfrak{G}(u) = 0$, l'égalité précédente devient

$$\int_C \mathbf{M} dy - \mathbf{N} dx = 0.$$

Si l'on adopte pour (C) un contour tel que ACBA (fig. 1) formé de deux



parallèles aux axes issues d'un point A et limitées à une portion de courbe CB, on aura, moyennant les hypothèses de continuité indiquées,

$$\int_A^C \mathbf{M} dy + \int_C^B (\mathbf{M} dy - \mathbf{N} dx) - \int_B^A \mathbf{N} dx = 0.$$

Et, si l'on tient compte des valeurs écrites pour M et N, un calcul simple montre que

$$(3) \quad (uz)_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \int_B^C M dy - N dx \\ - \int_A^B z \left(\frac{\partial u}{\partial x} - bu \right) dx - \int_A^C z \left(\frac{\partial u}{\partial y} - au \right) dy,$$

où les notations $(uz)_A$, $(uz)_B$, $(uz)_C$ désignent les valeurs que prend le produit uz aux points A, B, C.

Si l'on choisit une solution de l'équation adjointe $\mathcal{G}(u)$ satisfaisant à

$$\frac{\partial u}{\partial x} - bu = 0 \quad \text{le long de AB,}$$

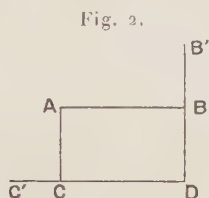
$$\frac{\partial u}{\partial y} - au = 0 \quad \text{le long de AC,}$$

on aura

$$(uz)_A = \frac{(uz)_B + (uz)_C}{2} - \int_B^C (M dy - N dx),$$

ce qui déterminera la solution z de l'équation aux dérivées partielles $\mathcal{F}(z) = 0$ prenant des valeurs données, ainsi qu'une de ses dérivées premières le long d'une courbe donnée.

Si la courbe donnée est formée de deux portions de caractéristiques (*fig. 2*),



la connaissance de la seule fonction z le long de la courbe suffit à déterminer la solution :

L'intégrale

$$\int_B^C (M dy - N dx)$$

devient

$$\int_C^B N dx - \int_B^C M dy,$$

et l'on vérifie que l'expression (3) se transforme en la suivante :

$$(4) \quad z_A = (uz)_B = \int_C^B u \left(\frac{\partial z}{\partial x} + bz \right) dx - \int_B^D u \left(\frac{\partial z}{\partial y} + az \right) dy.$$

Nous avons déjà énoncé le résultat suivant dû à M. Poincaré : si, pour une valeur déterminée de α et de μ , on connaît les valeurs numériques de quatre coefficients du développement de la fonction perturbatrice, les valeurs numériques de tous les autres coefficients s'exprimeront en fonction linéaire des quatre premiers, les facteurs qui les multiplient étant des fonctions rationnelles de α et μ .

Mais plaçons-nous dans l'hypothèse suivante : nous connaissons effectivement les valeurs des coefficients *pour une valeur numérique déterminée de α* , ils restent donc fonctions de μ , et, d'autre part, nous les connaissons aussi *pour une valeur numérique déterminée de μ , la valeur $\mu = \frac{1}{2}$, qui fournit la caractéristique $Y = 0$* ; ils restent alors fonctions de α . La méthode de Riemann va nous permettre de les déterminer pour des valeurs numériques quelconques de α et de μ .

Considérons donc tout d'abord l'équation qui correspond au coefficient Π_0 . Nous avons vu précédemment qu'elle se ramenait à la forme

$$(5) \quad \frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial X \partial Y} = \frac{1}{4} \frac{1}{(X - Y)^2}.$$

La fonction auxiliaire u , qu'on peut appeler *fonction de Riemann*, doit satisfaire ici aux conditions

$$\frac{\partial u}{\partial X} = 0 \quad \text{le long de AB,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad \text{le long de AC.}$$

Si nous désignons par X_0, Y_0 les coordonnées du point A, nous sommes donc ramenés à trouver une solution de l'équation (5) (puisqu'elle est identique à son adjointe) dépendant des deux paramètres X_0 et Y_0 et se réduisant, pour $X = X_0$ et pour $Y = Y_0$, à une constante qu'on peut supposer égale à l'unité.

L'équation (5) est de la forme connue

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\beta(1-\beta)}{(x-y)^2} \quad \text{où} \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

Le changement de fonction

$$\Pi' = (X - Y)^{\frac{1}{2}} \vartheta$$

ramène alors l'équation (5) à la forme

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial X \partial Y} - \frac{\frac{1}{2}}{X - Y} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\frac{1}{2}}{(X - Y)} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0.$$

C'est l'équation désignée sous le nom d'*équation d'Euler et de Poisson*, par M. Darboux ⁽¹⁾ et à laquelle Riemann a appliqué sa méthode.

Le succès de la méthode repose sur les considérations suivantes :

1° Les intégrales particulières homogènes de (6) sont obtenues en posant

$$\begin{cases} Y = t, & \theta = X^\lambda \varphi(t), \end{cases}$$

et l'on trouve que φ doit satisfaire à l'équation

$$t(1-t)\varphi''(t) + \left[\frac{1}{2} - \lambda - \left(\frac{3}{2} - \lambda \right) t \right] \varphi'(t) + \frac{\lambda}{2} \varphi(t) = 0.$$

C'est la célèbre équation de Gauss à laquelle satisfait la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) \quad \text{en prenant par exemple} \quad \begin{cases} \alpha = -\lambda, \\ \beta = \frac{1}{2}, \\ \gamma = \frac{1}{2} - \lambda. \end{cases}$$

On a donc pour l'équation en θ la solution particulière

$$\theta = X^\lambda F\left(-\lambda, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \lambda, \frac{Y}{X}\right).$$

2° Cette solution ne dépend que d'un paramètre λ . On en introduit deux, grâce à un résultat dû à M. Darboux, et étendu par M. Appell à des équations un peu plus générales que l'équation (6) et qui est le suivant :

De toute solution $\theta(X, Y)$ de l'équation (6) on peut déduire la solution plus générale

$$(aX + b)^{-\frac{1}{2}} (aY + b)^{-\frac{1}{2}} \theta\left(\frac{cX + d}{aX + b}, \frac{cY + d}{aY + b}\right),$$

a, b, c, d désignant des constantes quelconques.

En opérant alors la substitution

$$X \left| \frac{X - Y_0}{-X + X_0}, \quad Y \left| \frac{Y - Y_0}{-Y + X_0}, \right.$$

(1) Voir *Théorie des surfaces*, Livre IV, Chap. III.

on aura la solution Θ déduite de la solution θ écrite plus haut

$$\Theta = (-X + X_0)^{-\lambda - \frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} F\left(-\lambda, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \lambda, \sigma\right),$$

où

$$\sigma = \frac{(Y - Y_0)(X_0 - X)}{(X_0 - Y)(X - Y_0)}.$$

Par suite, une solution particulière de l'équation (5) sera

$$(X - Y)^{\frac{1}{2}} \Theta.$$

Et l'on peut alors déterminer λ de façon que cette solution soit la fonction de Riemann relative à l'équation (5). On voit, en effet, que pour $X = X_0$ le facteur $(-X + X_0)^{-\lambda - \frac{1}{2}}$ rend Θ nul ou infini à moins que $\lambda = -\frac{1}{2}$. Pour cette valeur de λ on a, après avoir multiplié la fonction par $(X_0 - Y_0)^{\frac{1}{2}}$,

$$u = (X - Y)^{\frac{1}{2}} (X_0 - Y_0)^{\frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right).$$

Cette fonction u est une solution de l'équation (5) dépendant de deux paramètres X_0, Y_0 et se réduisant à l'unité pour $X = X_0, Y = Y_0$. C'est donc bien la fonction de Riemann cherchée.

On remarque que cette solution est indépendante de la courbe le long de laquelle on se donne les valeurs de la fonction Π' .

L'équation (5) a ses coefficients finis tant que $X \neq Y$; ou, si l'on veut, la droite $X = Y$ est une ligne de discontinuité pour l'équation (5).

Les coefficients demeureront par suite finis et continus tant qu'on ne traversera pas la droite $X = Y$.

Or, en remontant à la signification des variables X et Y , on voit que

$$X - Y = \frac{x^2}{(1 + x^2)^2} - y^2 = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} - \frac{(2\mu - 1)^2 \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}.$$

Comme on suppose essentiellement $\alpha \neq 0$, $X - Y$ sera nul si $\mu = 0$ ou si $\mu = 1$.

D'ailleurs, comme $X - Y = \frac{4\mu(1 - \mu)\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}$ et que $\mu = \cos^2 \frac{J}{2}$, il en résulte que toujours

$$X \geq Y.$$

Les valeurs de la fonction Π' n'ont donc lieu d'être déterminées que pour une seule des deux régions en lesquelles la droite $X = Y$ partage le plan.

Il primo dei due è il più importante.

Il secondo è il più facile.

Il terzo è il più difficile.

Il quarto è il più importante.

Il quinto

Il sesto

Il settimo

Il ottavo

Il nono

Il decimo

Il undicesimo

Il dodicesimo

Il tredicesimo

Il quattordicesimo

Il quindicesimo

Il sedicesimo

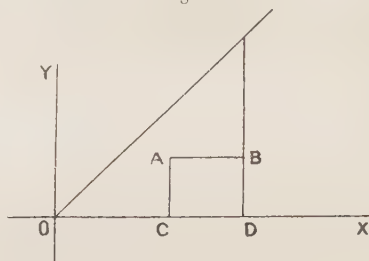
Il diciannovesimo

donnée par la formule indiquée précédemment

$$(7) \quad \Pi'_{X_0, Y_0} = (u \Pi')_{X_1, Y_1} - \int_C^D u \frac{\partial \Pi'}{\partial X} dX - \int_B^D u \frac{\partial \Pi'}{\partial Y} dY,$$

en désignant par X_0, Y_0 les coordonnées du point A et par X_1, Y_1 celles du point D (fig. 3).

Fig. 3.



On cherche donc le développement du second membre de cette égalité suivant les puissances de $X_0 - Y_0$.

La valeur trouvée pour u exige le développement de

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right), \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{(Y - Y_0)(X_0 - X)}{(X_0 - Y)(X - Y_0)}$$

suivant les puissances de $X_0 - Y_0$.

Or (1)

$$1 - \sigma = \frac{(X - Y)(X_0 - Y_0)}{(X_0 - Y)(X - Y_0)}.$$

D'ailleurs, on sait que l'équation du second ordre précédemment écrite à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, admettant comme points critiques les points 0 et 1, est satisfaite dans le domaine du point 1 par les deux intégrales particulières

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - \sigma\right)$$

et

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1 - \sigma\right) \log(1 - \sigma) + 4\psi(1 - \sigma),$$

où

$$\psi(1 - \sigma) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \right]^2 B_m (1 - \sigma)^m$$

(1) Voir DARBOUX, *loc. cit.*

en posant

$$B_m = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2m}.$$

La solution de l'équation $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right)$ s'exprime alors en fonction des deux précédentes par la formule (1)

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma\right) = \frac{4 \log 2}{\pi} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-\sigma\right) - \frac{1}{\pi} \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-\sigma\right) \log(1-\sigma) + 4\psi(1-\sigma) \right].$$

Il est alors facile d'obtenir l'expression approchée de la fonction de Riemann u , quand $X_0 - Y_0$ tend vers zéro. Il suffit en effet de réduire la fonction $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-\sigma\right)$ à son premier terme et d'annuler $\psi(1-\sigma)$. On obtient ainsi pour premiers termes du développement de u suivant les puissances de $(X_0 - Y_0)$

$$(8) \quad u = (X - Y)^{\frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y_0)^{\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \frac{4 \log 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(X - Y)(X_0 - Y_0)}{(X_0 - Y)(X - Y_0)} + [\alpha(X_0 - Y_0) + \dots] \right\},$$

la dernière parenthèse procédant suivant les puissances entières et positives de $(X_0 - Y_0)$.

Cette valeur de u transportée dans l'expression (7) donnera la valeur de Π' au point X_0, Y_0 . Mais on a vu [II^e Partie, équat. (5)] qu'on en déduit le coefficient Π lui-même du développement de la fonction perturbatrice en multipliant Π' par le facteur

$$(1 + x^2)^{1-s} [x^2 - y^2(1 + x^2)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

qui s'écrit ici

$$(1 + x_0^2)^{-s} [X_0 - Y_0]^{-\frac{1}{2}},$$

x_0 étant la valeur de x qui donne à X la valeur X_0 .

Il s'ensuit que, dans le deuxième membre de l'équation (7), la partie principale du terme qui contient Π'_{X_1, Y_1} s'écrit aux environs de $X_0 = Y_0$

$$\Pi'_{X_1, Y_1} \left\{ (X_1 - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \right. \\ \left. \times \left[\frac{4 \log 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(X_1 - Y_1)(X_0 - Y_0)}{(X_0 - Y_1)(X_1 - Y_0)} + \dots \right] \right\}.$$

(1) TANNERY, *Annales de l'École Normale*, t. VIII.

On remplacera de même u par sa valeur dans chacune des intégrales qui figurent dans la formule de Riemann (7).

Et finalement la solution prendra la forme

$$(9) \quad \Pi_{(X_0, Y_0)} = A + B \log (X_0 - Y_0),$$

A et B étant des fonctions de X_0, Y_0 , régulières en les points de la droite $X_0 - Y_0 = 0$ et développables suivant les puissances de $X_0 - Y_0$.

A, réduit à son terme constant, s'écrit

$$\begin{aligned} A = \Pi'_{(X_1, Y_1)} \left\{ (X_1 - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \left[\frac{4 \log 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(X_1 - Y_1)}{(X_0 - Y_1)(X_1 - Y_0)} \right] \right\} \\ - \int_{X_1}^{X_0} \frac{\partial \Pi'}{\partial X} (X - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \left[\frac{4 \log 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(X - Y_1)}{(X_0 - Y_1)(X - Y_1)} \right] dX \\ - \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{\partial \Pi'}{\partial Y} (X_1 - Y)^{\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \left[\frac{4 \log 2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \log \frac{(X_1 - Y)}{(X_0 - Y)(X_1 - Y_0)} \right] dY, \end{aligned}$$

et, bien que l'élément différentiel des intégrales qui figurent dans l'expression précédente devienne infini pour une des limites, elles ont un sens même lorsque $X_0 - Y_0$ tend vers zéro, comme on le vérifie aisément; elles se comportent en effet pour $X_0 = Y_0$ comme les intégrales

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^x \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx.$$

L'équation (9) donne donc, si l'on réduit A et B à leur terme indépendant de $(X_0 - Y_0)$, l'expression approchée du coefficient $\Pi_{00}(X_0, Y_0)$ lorsque la valeur de X_0 se rapproche de celle de Y_0 .

Lorsque $X_0 = Y_0$, le coefficient Π_{00} devient égal au coefficient de Laplace b_s^0 , qui n'admet pas évidemment la droite $X_0 = Y_0$ comme ligne singulière.

D'ailleurs, le terme principal du coefficient de $\log(X_0 - Y_0)$ dans l'expression s'écrit

$$\begin{aligned} B = - \frac{1}{\pi} \Pi'_{(X_1, Y_1)} \left[(X_1 - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \right] \\ + \frac{1}{\pi} \int_{X_0}^{X_1} \frac{\partial \Pi'}{\partial X} \left[(X - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \right] dX \\ + \frac{1}{\pi} \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{\partial \Pi'}{\partial Y} \left[(X_1 - Y)^{\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} (1 + x_0^2)^{-s} \right] dY, \end{aligned}$$

et les intégrales ont un sens. Il est, par suite, nécessaire que la distribution des valeurs de Π' , le long des deux parallèles aux caractéristiques, soit telle que ce coefficient B soit nul. On aura, par suite, entre le coefficient de Laplace b_s^0 et les valeurs que prend la fonction Π' le long des droites CD et DB , la relation approchée

$$b_s^0 = A,$$

qui, si l'on tient compte de $B = 0$, donne finalement

$$\begin{aligned} (1 + x_0^2)^s \pi b_s^0 = - \Pi'_{X_1, Y_1} \left\{ (X_1 - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} \left[\log \frac{(X_1 - Y_1)}{(X_0 - Y_1)(X_1 - Y_0)} \right] \right\} \\ + \int_{X_0}^{X_1} \frac{\partial \Pi'}{\partial X} (X - Y_1)^{\frac{1}{2}} (X - Y_0)^{-\frac{1}{2}} (X_0 - Y_1)^{-\frac{1}{2}} \left[\log \frac{(X - Y_1)}{(X_0 - Y_1)(X - Y_0)} \right] dX \\ + \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{\partial \Pi'}{\partial Y} (X_1 - Y)^{\frac{1}{2}} (X_0 - Y)^{-\frac{1}{2}} (X_1 - Y_0)^{-\frac{1}{2}} \left[\log \frac{(X_1 - Y)}{(X_0 - Y)(X_1 - Y_0)} \right] dY, \end{aligned}$$

où l'on suppose

$$X_0 = Y_0.$$

On a vu (Chap. II) que les équations aux dérivées partielles du second ordre, auxquelles satisfont les différentes fonctions de Π' qui correspondent aux coefficients $\Pi_{00}, \Pi_{02}, \Pi_{20}, \Pi_{22}, \dots$, du développement de la fonction perturbatrice, se déduisent les unes des autres par une transformation de Moutard. La solution de Riemann ne pourra leur être appliquée que si l'on détermine pour chacune d'elles une fonction analogue à la fonction u , que nous avons appelée *fonction de Riemann*. Cette détermination s'effectue aisément. On a établi, en effet, dans le Chapitre II que toute solution σ d'une équation déduite par le procédé de Moutard d'une équation en z , au moyen d'une solution particulière ω , s'écrivait

$$\sigma = \frac{1}{\omega} \int \left[\omega^2 \frac{\partial \left(\frac{z}{\omega} \right)}{\partial x} dx - \omega^2 \frac{\partial \left(\frac{z}{\omega} \right)}{\partial y} dy \right];$$

par suite,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial x} &= \omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ - \frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial y} &= \omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned}$$

Tout revient donc à déterminer la solution z de l'équation primitive de façon que la solution correspondante σ de la nouvelle équation, déduite par le

procédé de Moutard, soit précisément la fonction de Riemann de cette dernière équation.

Si nous désignons par x, y les variables indépendantes, nous chercherons donc une fonction $\sigma(x, y, x_0, y_0)$ de ces deux variables et de deux constantes x_0, y_0 , telle que

$$\sigma(x_0, y, x_0, y_0) = 1,$$

$$\sigma(x, y_0, x_0, y_0) = 1.$$

Cela exigera, si l'on se reporte aux expressions de $\frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial x}$ et de $\frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial y}$, que l'on ait

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \omega \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial\omega}{\partial x} \quad \text{pour} \quad y = y_0$$

et

$$-\frac{\partial\omega}{\partial y} = \omega \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \text{pour} \quad x = x_0;$$

par suite, la solution $z(x, y)$ de l'équation primitive devra satisfaire aux deux conditions

$$z(x, y_0) = \frac{\omega(x, y_0)}{\omega(x_0, y_0)} - 1,$$

$$z(x_0, y) = -\frac{\omega(x_0, y)}{\omega(x_0, y_0)} + 1.$$

Ces conditions nécessaires étant imposées à z , voyons la forme que prendra σ pour $x = x_0$ ou pour $y = y_0$. On obtient alors

$$\frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial x} \quad \text{pour} \quad y = y_0,$$

$$\frac{\partial(\omega\sigma)}{\partial y} = \frac{\partial\omega}{\partial y} \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

relations qui donnent pour σ des expressions de la forme

$$\sigma(x, y_0, x_0, y_0) = 1 + \frac{k}{\omega(x, y_0)},$$

$$\sigma(x_0, y, x_0, y_0) = 1 + \frac{k}{\omega(x_0, y)},$$

la constante k étant, d'ailleurs, déterminée par l'équation

$$\sigma(x_0, y_0, x_0, y_0) = 1 + \frac{k}{\omega(x_0, y_0)};$$

mais on peut toujours disposer de la constante d'intégration qui figure dans la

quadrature du second membre de l'équation qui détermine σ en fonction de z et de ω , de façon que la valeur $\sigma(x_0, y_0, x_0, y_0)$ soit égale à l'unité. Dans ces conditions, le facteur k est nul et l'on a

$$\sigma(x, y_0, x_0, y_0) = 1,$$

$$\sigma(x_0, y, x_0, y_0) = 1.$$

Notre fonction σ ainsi déterminée est donc bien la fonction de Riemann cherchée. Elle correspondra à la solution z de l'équation primitive qui, pour $y = y_0$, prend les valeurs de

$$\frac{\omega(x, y_0)}{\omega(x_0, y_0)} - 1$$

et, pour $x = x_0$, les valeurs de

$$- \frac{\omega(x_0, y)}{\omega(x_0, y_0)} + 1.$$

Cette fonction z est donc complètement déterminée, puisque nous lui assignons les valeurs qu'elle doit prendre sur deux parallèles aux caractéristiques et que nous connaissons la fonction de Riemann (u) de l'équation du second ordre à laquelle elle satisfait. On aura

$$z(x, y) = - \int_x^{x_0} u \frac{\partial z}{\partial x_0} dx_0 - \int_y^{y_0} u \frac{\partial z}{\partial y_0} dy_0.$$

On saura donc intégrer les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les coefficients Π_{02} , Π_{20} , Π_{22} , ..., du développement de la fonction perturbatrice, dans les conditions mêmes où nous nous sommes placés pour déterminer le coefficient Π_{00} .

Il nous reste à nous occuper des coefficients dont les deux indices sont impairs. Nous avons vu que les équations auxquelles ils satisfont dérivent toutes de l'équation

$$\frac{1}{\Pi'} \frac{\partial^2 \Pi'}{\partial X \partial Y} = - \frac{1}{4} \frac{1}{(X+Y)^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(X-Y)^2},$$

où

$$X = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad Y = \frac{(2\mu - 1)\alpha}{1 + \alpha^2};$$

cette équation admet pour solution particulière

$$\Pi' = (X - Y)^{-\frac{1}{2}} (X + Y)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on essaie de suivre la méthode employée par Riemann pour l'équation dont il a été question au début de ce Chapitre, on est amené à faire le changement de fonction

$$\Pi' = (X - Y)^{-\frac{1}{2}} (X + Y)^{\frac{1}{2}} \theta,$$

et l'équation en θ est

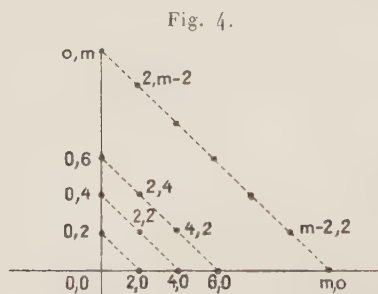
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X \partial Y} - \frac{Y}{X^2 - Y^2} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \frac{X}{X^2 - Y^2} \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0.$$

Mais ce qui assurait dans le premier cas le succès de la méthode, c'était cette propriété des invariants de l'équation différentielle de conserver leur valeur quand on effectuait sur X et Y une même substitution linéaire. Ce fait ne se présente plus ici. Et, bien qu'on puisse trouver un grand nombre de solutions particulières de l'équation en θ , homogènes ou harmoniques, la fonction de Riemann semble fort difficile à déterminer.

Mais, en réalité, la détermination de tous les coefficients du développement de la fonction perturbatrice se ramène à la connaissance des seuls coefficients à deux indices pairs. Cela résulte, en effet, de la relation entre cinq coefficients écrite au Chapitre I et qui devient, avec les nouvelles variables $X = \frac{x}{1+x^2}$, $Y = y$,

$$\begin{aligned} m \Pi_{mn} = & \frac{X+Y}{2} [(m+1-s) \Pi_{m+1, n-1} + (m-1+s) \Pi_{m-1, n+1}] \\ & + \frac{X-Y}{2} [(m+1-s) \Pi_{m+1, n+1} + (m-1+s) \Pi_{m-1, n-1}]. \end{aligned}$$

Et, pour m et n impairs, les indices des coefficients qui figurent dans le



second membre sont tous pairs. Et nous avons montré qu'on sait pour chacun d'eux déterminer la fonction de Riemann relative à l'équation à laquelle ils satisfont.

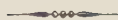
On a vu que, d'une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfaisait le coefficient Π_{mn} , le procédé de Moutard permettait de déduire une équation à laquelle satisfait $\Pi_{m+2,n}$, par exemple; comme $\Pi_{m,n} = \Pi_{nm}$, $\Pi_{m+2,n} = \Pi_{n,m+2}$, on peut exprimer le résultat suivant :

Convenons de porter en abscisses et en ordonnées les indices, tous deux pairs par exemple, des coefficients : le point d'abscisse m , d'ordonnée n (*fig. 4*), représentera le coefficient $\Pi_{m,n}$. Dans ces conditions, *tous les coefficients dont les points représentatifs sont distribués sur une parallèle à la deuxième bissectrice de l'angle des axes satisfont à une même équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme*

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = h \Pi,$$

où

$$x = \alpha, \quad y = \frac{(2\mu - 1)\alpha}{1 + \alpha^2}.$$



QUATRIÈME PARTIE.

Nous avons jusqu'ici considéré les coefficients Π_{mn} comme des fonctions des trois variables indépendantes μ, ν, α , puis des deux variables μ, α . Si les coefficients Π_{mn} sont regardés comme des fonctions de l'un seul des éléments, chacun de ces coefficients, comme l'a montré M. Poincaré ⁽¹⁾, satisfait à une équation différentielle linéaire du quatrième ordre.

Proposons-nous de chercher l'équation différentielle à laquelle satisfait le coefficient Π_{00} dont nous nous sommes occupé à un autre point de vue. Une méthode élémentaire permet de déterminer les coefficients de cette équation différentielle.

En effet, une intégrale double ⁽¹⁾

$$\int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \frac{H \, dx \, dy}{xy \left[(1 + \alpha^2) - \alpha\mu \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \alpha\nu \left(xy + \frac{1}{xy} \right) \right]^s},$$

où H est un polynôme entier en $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$, est nulle si

$$(1) \quad H = x \frac{\partial P}{\partial x} F + (1-s) x \frac{\partial F}{\partial x} P + y \frac{\partial Q}{\partial y} F + (1-s) y \frac{\partial F}{\partial y} Q,$$

où

$$F = (1 + \alpha^2) - \alpha\mu \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - \alpha\nu \left(xy + \frac{1}{xy} \right)$$

et où P et Q désignent des polynômes en $x, \frac{1}{x}, y, \frac{1}{y}$.

Soit alors l'intégrale

$$\Pi_{00} = \int_{|x|=1} \int_{|y|=1} \frac{dx \, dy}{xy F^s},$$

que nous considérons comme fonction de μ , par exemple. Ce coefficient Π_{00} , que nous désignerons simplement par Π , satisfait à une équation de la forme

$$\beta_4 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \mu^4} + \beta_3 \frac{\partial^3 \Pi}{\partial \mu^3} + \beta_2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mu^2} + \beta_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} + \beta_0 \Pi = 0,$$

⁽¹⁾ H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, Chap. XXI.

$\beta_4, \dots, \beta_0$ étant des polynômes en μ, ν, α , où ν et α seront considérés comme des constantes.

On peut, comme on l'a remarqué dans la première Partie, obtenir les dérivées de Π en dérivant uniquement la fonction, sous le signe $\int \int$, sans se préoccuper des contours.

Mais alors le premier membre de l'équation

$$\beta_4 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \mu^4} + \dots + \beta_0 \Pi = 0$$

se mettra sous la forme

$$\int \int \frac{\Pi \, dx \, dy}{x y \mathbf{F}^{s+4}},$$

où

$$(2) \quad \Pi = s(s+1)(s+2)(s+3) \beta_4 \alpha^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^4 + s(s+1)(s+2) \beta_3 \alpha^3 \mathbf{F} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^3 \\ + s(s+1) \beta_2 \alpha^2 \mathbf{F}^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 + s \beta_1 \alpha \mathbf{F}^3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \beta_0 \mathbf{F}^4.$$

Et le polynôme Π présente la même double symétrie que le polynôme $\mathbf{F}$: le changement de x en $-x$, y en $-y$, ou de x en $\frac{1}{x}$, y en $\frac{1}{y}$, ne l'altère pas.

On obtient un polynôme Π satisfaisant à ces conditions en prenant pour $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$, dans le second membre de l'équation (1), des polynômes tels que

$$(3) \quad \begin{cases} \mathbf{P}(x, y) = -\mathbf{P}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right), \\ \mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{P}(y, x). \end{cases}$$

L'intégrale double qui représente

$$\beta_4 \frac{\partial^4 \Pi}{\partial \mu^4} + \dots + \beta_0 \Pi$$

sera donc nulle si

$$(4) \quad \Pi = x \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \mathbf{F} - (s+3) x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \mathbf{P} + y \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial y} \mathbf{F} - (s+3) y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \mathbf{Q}.$$

La valeur (2) montre que Π comprend quinze coefficients différents, qui sont ceux des termes

$$(5) \quad x^4 y^4, \quad \frac{x^4}{y^4}, \quad x y, \quad \frac{y}{x}, \quad x^4, \quad x^3 y^3, \quad \frac{x^3}{y^3}, \quad x^3 y, \quad \frac{x^3}{y}, \quad x^2 y^2, \quad \frac{x^2}{y^2}, \quad x^2, \quad xy, \quad \frac{x}{y},$$

et le terme constant.

Les autres termes du développement de H se déduisent en effet de ceux-là en raison de la double symétrie indiquée.

Les polynômes P et Q , qui doivent satisfaire déjà aux conditions (3), seront nécessairement du troisième degré, F étant du premier degré et H du quatrième.

Les conditions de symétrie leur imposent la forme

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x, y) = \lambda_1 \left(x^3 y^3 - \frac{1}{x^3 y^3} \right) + \lambda_2 \left(\frac{x^3}{y^3} - \frac{y^3}{x^3} \right) + \lambda_3 \left(x^3 y - \frac{1}{x^3 y} \right) \\ \quad + \lambda_4 \left(\frac{x^3}{y} - \frac{y}{x^3} \right) + \lambda_5 \left(x^2 y^2 - \frac{1}{x^2 y^2} \right) + \lambda_6 \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) + \lambda_7 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \\ \quad + \lambda_8 \left(xy - \frac{1}{xy} \right) + \lambda_9 \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) + \lambda_{10} \left(xy^3 - \frac{1}{xy^3} \right) + \lambda_{11} \left(\frac{x}{y^3} - \frac{y^3}{x} \right) \\ \quad \text{avec} \\ Q(x, y) = P(y, x). \end{array} \right.$$

Si l'on calcule alors, dans le second membre de la relation (4), les coefficients des différents termes dans l'ordre où ils sont écrits en (5), on obtient successivement :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Pour } x^4 y^4 \dots & 2s\lambda_1 \alpha \nu, \\ \text{Pour } \frac{x^4}{y^4} \dots & 2s\lambda_2 \alpha \mu, \\ \text{Pour } x^4 y^2 \dots & -6\alpha \mu \lambda_1 + s\alpha \nu \lambda_3 + (s+2)\alpha \nu \lambda_{10}, \\ \text{Pour } \frac{x^4}{y^2} \dots & -6\alpha \nu \lambda_2 + s\alpha \mu \lambda_4 + (s+2)\alpha \mu \lambda_{11}, \\ \text{Pour } x^4 \dots & s\alpha \mu \lambda_3 + s\alpha \nu \lambda_4 - (s+4)\alpha \mu \lambda_{10} - (s+4)\alpha \nu \lambda_{11}, \\ \text{Pour } x^3 y^3 \dots & 6(1+\alpha^2)\lambda_1 + 2(s+1)\alpha \nu \lambda_3, \\ \text{Pour } \frac{x^3}{y^3} \dots & 6(1+\alpha^2)\lambda_2 + 2(s+1)\alpha \mu \lambda_4, \\ \text{Pour } x^3 y \dots & 3(1+\alpha^2)\lambda_3 - 4\alpha \mu \lambda_5 + (s+1)\alpha \nu \lambda_7 + (1+\alpha^2)\lambda_{10}, \\ \text{Pour } \frac{x^3}{y} \dots & 3(1+\alpha^2)\lambda_4 - 4\alpha \nu \lambda_6 + (s+1)\alpha \mu \lambda_7 + (1+\alpha^2)\lambda_{11}, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \text{Pour } x^2 y^2 \dots & - 2(s+6) \alpha \nu \lambda_1 - 2(s+6) \alpha \mu \lambda_1, \\
 & & + 4(1+\alpha^2) \lambda_5 + 2(s+2) \alpha \nu \lambda_8 + (s+2) \alpha \mu \lambda_{10}, \\
 & \text{Pour } \frac{x^2}{y^2} \dots & - 2(s+6) \alpha \mu \lambda_2 - 2(s+6) \alpha \nu \lambda_4, \\
 & & + 4(1+\alpha^2) \lambda_6 + 2(s+2) \alpha \mu \lambda_9 + (s+2) \alpha \nu \lambda_{11}, \\
 & \text{Pour } x^2 \dots & - (s+6) \alpha \nu \lambda_3 - (s+6) \alpha \mu \lambda_4, \\
 & & + 2(1+\alpha^2) \lambda_7 - 2 \alpha \mu \lambda_8 - (s+4) \alpha \nu \lambda_{10} - (s+4) \alpha \mu \lambda_{11}, \\
 & \text{Pour } xy \dots & - 2(s+5) \alpha \nu \lambda_5 - 2(s+5) \alpha \mu \lambda_7 + 2(1+\alpha^2) \lambda_8, \\
 & \text{Pour } \frac{x}{y} \dots & - 2(s+5) \alpha \mu \lambda_6 - 2(s+5) \alpha \nu \lambda_7 + 2(1+\alpha^2) \lambda_9, \\
 & \text{Pour const} \dots & - 4(s+4) \alpha \nu \lambda_8 - 4(s+4) \alpha \mu \lambda_9.
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Si nous calculons dans H, sous la forme (2), les valeurs des coefficients des termes correspondants, on trouve

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \text{Pour } x^4 y^4 \dots & \alpha^4 \nu^4 \beta_0, \\
 & \text{Pour } \frac{x^4}{y^4} \dots & s(s+1)(s+2)(s+3) \beta_4 \alpha^4 - s(s+1)(s+2) \beta_3 \alpha^4 \mu \\
 & & + s(s+1) \beta_2 \alpha^4 \mu^2 - s \beta_1 \alpha^4 \mu^3 + \beta_0 \alpha^4 \mu^4, \\
 & \text{Pour } x^4 y^2 \dots & - s \beta_1 \alpha^4 \nu^3 + 4 \beta_0 \alpha^4 \mu \nu^3, \\
 & \text{Pour } \frac{x^4}{y^2} \dots & - s(s+1)(s+2) \beta_3 \alpha^4 \nu \\
 & & + 2s(s+1) \beta_2 \alpha^4 \mu \nu - 3s \beta_1 \alpha^4 \mu^2 \nu + 4 \beta_0 \alpha^4 \mu^3 \nu, \\
 & \text{Pour } x^4 \dots & s(s+1) \beta_2 \alpha^4 \nu^2 - 3s \beta_1 \alpha^4 \nu^2 \mu + 6 \beta_0 \alpha^4 \nu^2 \mu^2, \\
 & \text{Pour } x^3 y^3 \dots & - 4 \beta_0 \alpha^3 (1+\alpha^2) \nu^3, \\
 & \text{Pour } \frac{x^3}{y^3} \dots & s(s+1)(s+2) \beta_3 \alpha^3 (1+\alpha^2) - 2s(s+1) \beta_2 \alpha^3 \mu (1+\alpha^2) \\
 & & + 3s \beta_1 \alpha^3 \mu^2 (1+\alpha^2) - 4 \beta_0 \alpha^3 \mu^3 (1+\alpha^2), \\
 & \text{Pour } x^3 y \dots & 3s \beta_1 \alpha^3 \nu^2 (1+\alpha^2) - 12 \beta_0 \alpha^3 \mu \nu^2 (1+\alpha^2), \\
 & \text{Pour } \frac{x^3}{y} \dots & - 2s(s+1) \beta_2 \alpha^3 \nu (1+\alpha^2) \\
 & & + 6s \beta_1 \alpha^3 \mu \nu (1+\alpha^2) - 12 \beta_0 \alpha^3 \mu^2 \nu (1+\alpha^2),
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

	Pour $x^2 y^2 \dots$	$2s(s+1)\beta_2 \alpha^i \nu^2 - 6s\beta_1 \alpha^i \mu \nu^2$ $+ 2\beta_0 \alpha^2 \nu^2 [2\alpha^2 \nu^2 + 3(1+\alpha^2)^2 + 6\alpha^2 \mu^2],$
	Pour $\frac{x^2}{y^2} \dots$	$4s(s+1)(s+2)(s+3)\beta_4 \alpha^i - 4s(s+1)(s+2)\beta_3 \alpha^i \mu$ $+ s(s+1)\beta_2 [4\alpha^4 \mu^2 + \alpha^2(1+\alpha^2)^2 + 2\alpha^4 \nu^2]$ $- s\beta_1 [4\alpha^4 \mu^3 + 6\alpha^4 \nu^2 \mu + 3(1+\alpha^2)^2 \alpha^2 \mu]$ $+ \beta_0 [4\alpha^4 \mu^4 + 12\alpha^4 \mu^2 \nu^2 + 6(1+\alpha^2)^2 \alpha^2 \mu^2],$
	Pour $x^2 \dots$	$- 3s(s+1)(s+2)\beta_3 \alpha^i \nu + 6s(s+1)\beta_2 \alpha^i \mu \nu$ $- 3s\beta_1 [\alpha^4 \nu^3 + (1+\alpha^2)^2 \alpha^2 \nu + 3\alpha^4 \mu^2 \nu]$ $+ 12\beta_0 [\alpha^2 \mu \nu (1+\alpha^2)^2 + \alpha^4 \nu^3 \mu + \alpha^4 \mu^3 \nu],$
(8) (suite)	Pour $xy \dots$	$- 4s(s+1)\beta_2 \alpha^3 \nu (1+\alpha^2) + 12s\beta_1 \alpha^3 \mu \nu (1+\alpha^2)$ $- \beta_0 (1+\alpha^2) [6\alpha^3 \nu^3 + 24\alpha^3 \mu^2 \nu + 4\alpha \nu (1+\alpha^2)^2],$
	Pour $\frac{x}{y} \dots$	$3s(s+1)(s+2)\beta_3 \alpha^3 (1+\alpha^2) - 6s(s+1)\beta_2 \alpha^3 \mu (1+\alpha^2)$ $+ s\beta_1 (1+\alpha^2) [6\alpha^3 \nu^2 + \alpha(1+\alpha^2)^2 + 9\alpha^3 \mu^2]$ $- 4\beta_0 (1+\alpha^2) [3\alpha^3 \mu^3 + 6\alpha^3 \mu \nu^2 + \alpha \mu (1+\alpha^2)^2],$
	Pour const...	$6s(s+1)(s+2)(s+3)\beta_4 \alpha^4 - 6s(s+1)(s+2)\beta_3 \alpha^4 \mu$ $+ s(s+1)\beta_2 [6\alpha^4 \mu^2 + 4\alpha^4 \nu^2 + 2\alpha^2(1+\alpha^2)^2]$ $- s\beta_1 [6\alpha^4 \mu^3 + 12\alpha^4 \mu \nu^2 + 6\alpha^2 \mu (1+\alpha^2)^2]$ $+ \beta_0 [6\alpha^4 \mu^4 + 6\alpha^4 \nu^4 + 12\alpha^2 \mu^2 (1+\alpha^2)^2$ $+ 12\alpha^2 \nu^2 (1+\alpha^2)^2 + 24\alpha^4 \mu^2 \nu^2 + (1+\alpha^2)^4].$

Si l'on égale alors chacune des lignes de l'accolade (7) à la ligne correspondante de l'accolade (8), on formera de la sorte quinze équations homogènes du premier degré entre les seize inconnues

$$\beta_4, \beta_3, \dots, \beta_0;$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{11}.$$

Nos coefficients $\beta_4, \dots, \beta_0$ se trouvent ainsi déterminés.

Il est facile d'avoir des limites supérieures des degrés des polynômes $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ considérés comme polynomes en μ . Les valeurs de $\beta_0, \dots, \lambda_{11}$ sont

données par les différents déterminants d'une matrice à 16 colonnes et 15 lignes dont un très grand nombre de termes sont nuls. Si l'on n'écrit pour chaque élément du Tableau que le terme de plus haut degré en μ , on aperçoit sans peine que les degrés maxima de $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sont respectivement 8, 9, 10, 11, 12, ces coefficients étant considérés comme polynômes en μ .

Vu et approuvé :

Paris, le 14 juin 1907.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 juin 1907.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Formes quadratiques arithmétiques.

Vu et approuvé :

Paris, le 14 juin 1907,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 14 juin 1907,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

